Metrologia

1° Obiettivo.
Saper riconoscere grandezze della stessa classe

1.1 Riconoscere quali delle seguenti enti sono grandezze dello stessa classe:
a) lunghezza di una matita
b) altezza di un albero
c) tempo di cottura di un uovo
d) fama di un calciatore

Due grandezze sono della stessa classe (o della stessa specie) quando è possibile stabilire un criterio operativo di confronto (per dire se la prima è maggiore, minore o uguale alla seconda) e un criterio di somma (per determinare una grandezza della stessa classe somma delle due date)

Degli enti dati possiamo dire che a) è della stessa classe di b) in quanto tra essi si può stabilire un confronto deducendo quale delle due è maggiore (si possono affiancare, verticali, appoggiati al suolo e con cima e punta verso l'alto) ed in quanto è possibile determinare una grandezza della stessa classe somma delle due (altezza rispetto al suolo a cui si trova la punta della matita appoggiata verticalmente con la punta in su sulla cima dell'albero).
Il tempo di cottura di un uovo c) non è della stessa classe delle precedenti a) b) in quanto non ha senso confrontarlo con esse per dire se è maggiore o minore rispetto ad ognuna di esse. Il tempo di cottura è una grandezza di un'altra classe, perché si può trovare un altro ente (ad esempio: tempo del rotazione della Terra intorno al proprio asse; tempo di oscillazione di un pendolo, eccetera) con il quale si può stabilire operativamente un confronto e definire la grandezza somma .

La fama di un calciatore evidentemente è un ente non confrontabile con i precedenti e quindi non della stessa classe di a) e b) né della classe di c).
Tale ente non è nemmeno una grandezza fisica perché non è possibile trovare un altro ente con quale fare operativamente il confronto e la somma (trovare un altro calciatore con la fama del quale confrontare la fama del primo e trovare una fama che sia somma delle due e che sia attribuibile ad un terzo calciatore).

1.2 Individuare tra i seguenti enti quelli attribuibili ad una stessa classe di grandezza.

A) lunghezza di una circonferenza
B) periodo di rivoluzione della Terra
C) volume di un solido
D) diametro di un'orbita di un elettrone
E) periodo di oscillazione di un pendolo
F) peso di un corpo
G) durata di una partita di calcio
H) lunghezza d'onda dalla nota emessa da un diapason
I) spinta idrostatica esercitata dall'acqua su una boa
L) forza esercitata da una molla
M) vita media gli uomini nati nel XV secolo
N) profondità di una piscina
O) capacità di una damigiana

2° obiettivo
Saper distinguere grandezze fisiche da indici di stato fisico

2.1 Dire se il tempo di cottura di un uovo e la temperatura di ebollizione dell'acqua, in condizioni normali, indicano grandezze fisiche o stati fisici.

Per stabilire se il tempo di cottura di un uovo indica una grandezza fisica o uno stato fisico, dobbiamo stabilire quale dei due concetti di estensione oppure di localizzazione è applicabile.
Se è applicabile il concetto di estensione si tratta di una grandezza fisica; se è applicabile quello di localizzazione (di un evento), si tratta di indice di stato fisico.
Al tempo di cottura di un uovo è applicabile il concetto di estensione in quanto si tratta di un intervallo di tempo (due, tre, cinque minuti) che intercorre tra l'inizio e la fine dell'esperimento culinario. Si tratta perciò di una grandezza fisica il cui valore non varia al variare dell'origine dei tempi.
Si sarebbe trattato del un indice di stato fisico, se si fosse parlato dell'istante di inizio dell'esperimento il cui valore sarebbe cambiato al variare dell'origine dei tempi.
Alla temperatura di ebollizione dell'acqua è applicabile il concetto di localizzazione in quanto essa indica un punto della scala termometrica prescelta, arrivato al quale l'acqua bolle. Si conclude perciò che essa indica uno stato fisico.
Si sarebbe trattato di una grandezza fisica se si fosse parlato, ad esempio, dell'intervallo di temperatura tra la temperatura dell'ebollizione dell'acqua e quella del fusione dallo zolfo.

2.2Nel seguente elenco segnare con una crocetta le espressioni nelle quali vengono indicati stati fisici. e con due crocette quelle nelle quali vengono indicate grandezze fisiche.
A) tempo di percorrenza dei cento metri piani
B) data di nascita di una persona
C) età di una persona
D) anno della scoperta dell'America
E) profondità a cui si trova un sub
F) energia prodotto da un motore in un'ora
G) quota a cui scoppia un razzo antigrandine
H) profondità di una piscina
I) posizione di un punto riferito ad assi cartesiani
L) distanza tra due punti definiti nella loro posizione
M) istante in cui ha inizio un fenomeno fisico
N) durata del fenomeno stesso

3° Obiettivo

Date le grandezze fondamentali di una certa organizzazione metrica sapere determinare le dimensioni delle grandezze derivate.

3.1 Data una organizzazione metrica le cui grandezza fondamentali sono la lunghezza [L], la massa [M], l'intervallo di tempo [T], determinare le dimensioni delle grandezze derivate, definite come segue:

a) velocità media Vm ($Vm=\Delta s/\Delta t$)
B) accelerazione istantanea a ($a=dv/dt$)
c) forza F ($F=ma$)
d) lavoro W con $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$

La velocità media è una grandezza derivata dalle grandezze fondamentali mediante la relazione nella quale il numeratore è una lunghezza cioè con dimensione [L] ed il denominatore è un tempo, cioè con dimensione [T].
Le sue dimensioni saranno perciò:
$[Vm]=[\Delta s/\Delta t]= [\Delta s]/[\Delta t]=[L]/[T]=[L][T]^{-1}$
L'accelerazione istantanea è anch'essa una grandezza derivata e si esprime come rapporto tra la grandezza derivata variazione infinitesima di velocità e la grandezza fondamentale intervallo di tempo infinitesimo.
Si ha quindi :
$[a]=[dv/dt]= [dv]/[dt]=[L][T]^{-1}/[T]=[L][T]^{-2}$
La forza F = m a, prodotto della grandezza fondamentale massa per la grandezza derivata accelerazione è dimensionalmente data da:
$[F]= [M][a] = [M][L][T]^{-2}$

Il lavoro espresso da : $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$ significa sommatoria, estesa da A a B, dei prodotti delle forze per i relativi spostamenti infinitesimi, ed ha le dimensioni di ciascuno dei vari prodotti:

[W] = $[\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}]$ =[F] [dr] = [M] [L] $[T]^{-2}$ [L]= [M] $[L]^2$ $[T]^{-2}$

3.2 Data una organizzazione metrica le cui grandezze fondamentali sono la lunghezza[L], la massa [M], l' intervallo di tempo[T], determinare le dimensioni delle seguenti grandezze derivate, definite come segue:

A) quantità un del moto p=m v (con m=massa e v=velocità)

B) Energia cinetica E_c = _ mv^2

C) densità δ= m/V (con V = volume)

D) potenza media P_m = W /Δt (con W=lavoro e Δt=intervallo di tempo)

3.3 Data una organizzazione metrica le cui grandezze fondamentali sono la lunghezza [L], la forza [F], l' intervallo di tempo [T], determinare le dimensioni delle seguenti grandezze derivate, definite come segue:

A) massa $m = \frac{F}{a}$

B) velocità media Vm=Δs/Δt

C) accelerazione a_m= Δv/Δt

D) lavoro $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$

E) quantità di moto $p = mv$

F) energia cinetica E_c = _ mv^2

3.4 Data una organizzazione metrica le cui grandezze fondamentali sono la lunghezza[L], la massa [M], l' intervallo di tempo[T], determinare le dimensioni delle seguenti grandezze derivate, definite come segue:

A) momento di una forza $|\tau|$ = F. r sinα

B) lavoro di una forza W = F . r cos α

C) angolo piano = arco /raggio =l/r

D) angolo solido = area/ raggio^2

Osservando i risultati di questo esercizio dire perché le grandezze che hanno le stesse dimensioni non si possono ritenere della stessa classe.

<u>4 ° Obiettivo</u>

Dato un sistema di misura con le grandezze fondamentali e le corrispondenti unità di misura, saper determinare le dimensioni e le unità di misura di grandezze derivate

4.1 Il sistema internazionale S.I. assume quali grandezze fondamentali la lunghezza, la massa e l'intervallo di tempo, con le rispettive unità di misura, metro, chilogrammo massa , secondo. Determinare le unità di misura delle seguenti grandezze derivate:

a) velocità ($v = \frac{ds}{dt}$)

b) accelerazione ($v = \frac{dv}{dt}$)

c) forza ($F = ma$)

d) lavoro ($W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$)

e) energia cinetica ($E_k = \frac{1}{2} mv^2$)

f) potenza media (Pm= W/Δt)

g) quantità di moto ($\vec{p} = m\vec{v}$)

a) b) c) d) Utilizzando i risultati dell'esercizio 3.1, possiamo scrivere le relazioni dimensionali per le grandezze a), b), c), d) che sono:

Velocità $[V]=[L]\,[T]^{-1}$

accelerazione $[a]=[L]\,[T]^{-2}$

Forza $[F]= [M]\,[L]\,[T]^{-2}$

Lavoro $[W] = [M]\,[L]^2\,[T]^{-2}$

L'unità di misura della velocità si ottiene sostituendo a [L] 1m e a [T] 1s per cui si ottiene:

$U_v = 1\ ms^{-1}$

Analogamente per le altre grandezze otteniamo:

unità accelerazione $U_a = 1\ ms^{-2}$

unità di forza $U_f = 1\ m\ kg\ s^{-2}$

unità di lavoro $U_E = 1\ m^2\ kg\ s^{-2} = 1\ N.m = 1J$

Per le altre grandezze fisiche e) ed f) bisogna prima determinarne le dimensioni.

e) L'energia cinetica è definita da Ec = _ mv^2. Le sue dimensioni sono :

$[Ec] = [L]^2\,[M]\,[T]^{-2}$

e quindi la sua unità di misura è:

$U_W = 1\ m^2\ kg\ s^{-2} = 1\ N.m = 1J$

ed è la stessa del lavoro.

f) la potenza media è definita come rapporto tra il lavoro eseguito e l'intervallo di tempo in cui questo lavoro viene eseguito. Le sue dimensioni sono:

potenza media $[P] = [W]/[T] =[M]\,[L]^2\,[T]^{-3}$

L'unità di potenza è: $U_p= 1\ m^2\ kg\ s^{-3}= 1\ J\ s^{-1} = 1W$

g) La quantità di moto è definita da p = mv. Le sue dimensioni sono: $[P] = [L]\,[M]\,[T]^{-1}$

l' unità di misura della quantità di moto è: $Up= 1\ m\ kg\ s^{-1}$

NOTA: si tenga presente che le relazioni $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, $F = ma$, ecc. fanno parte del sistema di misura dato che definiscono le unità scelte per misurare le grandezze derivate. Se per esempio si fosse usata la relazione $v_m = 2\frac{\Delta s}{\Delta t}$ per definire la velocità si sarebbe avuta la $v_m = 1$ quando Δs, ad esempio, vale 1 e Δt vale 2. In questo caso la velocità unitaria sarebbe più piccola perché l'unità di spazio verrebbe percorsa in un tempo doppio.

4.2 Il sistema CGS assume quali grandezze fondamentali la lunghezza, la massa e l'intervallo di tempo con le rispettive unità di misura: centimetro, grammo massa, secondo.

Determinare le unità di misura delle seguenti grandezze derivate:

a) velocità
b) accelerazione
c) forza (dine)
d) lavoro (erg)
e) potenza (erg s^{-1})
f) quantità di moto

4.3 Il sistema tecnico assume quali grandezze fondamentali la lunghezza, la forza e l'intervallo di tempo con le rispettive unità di misura, metro, chilogrammo forza , secondo.

Determinare le unità di misura delle seguenti grandezze derivate:

a) velocità

b) accelerazione
c) forza
d) massa
e) lavoro
f) potenza
g) quantità di moto

Per determinare le unità di misura bisogna scrivere le relazioni dimensionali e quindi operare come nell'esercizio 4.1

a) velocità media $[V]=[L][T]^{-1}$; Unità di misura della velocità $U_v = 1\ ms^{-1}$
b) accelerazione media $[a]=[L][T]^{-2}$; Unità di misura della accelerazione $U_a = 1\ ms^{-2}$
c) forza: è grandezza fondamentale [F]; Unità di misura della forza è Uf = 1kg forza
d) massa $=F/a= [F]/([L][T]^{-2}) = [L]^{-1}[F][T]^{2}$ Unità di misura della massa $Um = 1\ kgf\ m^{-1}\ s^{2}$
e) lavoro W = F. L = [F] [L] (forza per spostamento in alcuni casi particolari) Unità di misura del lavoro Uw= 1kgf . m =1 kgm (chilogrammetro)
f) potenza media = Lavoro $/\Delta t = [F][L][T]^{-1}$ Unità di misura della potenza $Up= 1kgm\ s^{-1}$
g) quantità di moto $p= mv = [L]^{-1}[F][T]^{2} . [L][T]^{-1} = [F][T]$ Unità di misura della quantità di moto Up = 1kgf . s

---

4.4 Calcolare la unità di misura dell'energia cinetica $Ec =1/2\ mv^2$ nei due sistemi di riferimento CGS e S.I..

4.5 Applicando ad una molla elastica una forza F traente, la molla si allunga di una quantità x proporzionale alla forza F secondo la relazione : F=kx.
Calcolare le dimensioni e l'unità di misura del coefficiente k nei tre sistemi S.I., CGS, tecnico.

4.6 Nella legge di gravitazione universale di Newton: $F = G\frac{M_1 M_2}{R^2}$ dove F è la forza di attrazione, M_1 ed M_2 sono le masse puntiformi ed r è la loro distanza. Si ricavino le dimensioni della costante di gravitazione universale G nei due sistemi S.I., CGS e si dica in quali unità di misura viene espressa.

4.7 Definita la pressione come rapporto tra una forza e una superficie, p=F/S, determinare le sue dimensioni e le sue unità di misura nei sistemi S.I., CGS, tecnico.

4.8 Definita la densità media $\delta m =m/V$ come rapporto fra la massa di un corpo e il suo volume e definito il peso specifico medio $\gamma m= P/V$ come rapporto tra il peso di un corpo e il suo volume, determinare le dimensioni delle due grandezze e le rispettive unità di misura nei sistemi S.I., CGS.

5° Obiettivo

Data la misura di una grandezza in un sistema di misura, saper determinare la misura della stessa grandezza in un altro sistema di misura.

5.1 La misura della densità di una sostanza nel sistema CGS è 3. Quanto vale la misura della sua densità nel sistema S.I. ?
Quanto vale il fattore di ragguaglio?

La densità δ di questa sostanza è $\delta= 3\ g\ cm^{-3}$. Volendo trovare la misura di questa grandezza nel sistema S.I. dovremo trovare quel numero x tale che sia $\delta= x\ kg\ .\ m^{-3}$. Operativamente si mantiene invariato il numero 3 e si esprime $g\ cm^{-3}$ nel sistema S.I.. Si ha:
$\delta= 3\ (10^{-3}\ kg)\ (10^{-2}\ m)^{-3} = 3\ .\ 10^{-3}.\ 10^{6}\ kg\ m^{-3}=3\ .\ 10^{3} kg\ m^{-3}$

Questo modo di operare la conversione delle misure ha applicabilità del tutto generale, anche quando si ah a che fare con misure fatte con unità di misura diverse da quelle dei sistemi di misura S.I. e c.g.s.
Il fattore di ragguaglio, dal sistema in cui la misura è data, al secondo sistema, è il numero per il quale bisogna moltiplicare la misura nel primo sistema per ottenere la misura nel secondo. Nel nostro caso è 10^3.
Si noti che è: r= vecchia unità/ nuova unità = nuova misura/ vecchia misura.
Si può inoltre dire che la nuova unità (S.I.) è 10^{-3} volte la vecchia unità (CGS) e quindi la nuova misura è 10^3 volte la vecchia misura.
Nel caso di sistemi di misura con le medesime grandezze fondamentali il fattore di ragguaglio si può calcolare mediante il prodotto dei rapporti tra le vecchie e le nuove unità di misura, elevati a potenze con esponenti uguali a quelli delle rispettive dimensioni.
Per esempio per convertire la misura di una forza ([L] [M] $[T]^{-2}$) dal sistema S.I. al c.g.s. il fattore di ragguaglio è $\frac{m}{cm} \cdot \frac{kg}{g} \cdot \left(\frac{s}{s}\right)^2 = 10^5$. Bisogna moltiplicare per tale fattore di ragguaglio la misura della forza nel sistema S.I. per ottenere la misura della forza nel sistema c.g.s..

5.2 Esprimere nel sistema S.I. le misure date nel sistema CGS delle seguenti grandezze e determinare i rispettivi fattori di ragguaglio.

a) quantità di moto p=8
b) velocità v= 5.000
c) lavoro w= 1,8 10^{10}
d) peso specifico Ps=7,8
e) densità δ = 1
f) forza F=10

5.3 Esprimere nel sistema CGS le misure date nel sistema S.I., delle seguenti grandezze e determinare i rispettivi fattori di ragguaglio.

a) massa m=5
b) accelerazione a= 9,81
c) potenza p=120

5.4 Esprimere nel sistema internazionale S.I. le misure date nei sistemi indicati:

a)	forza	7,5	(Tecnico)
b)	forza	1,8	(CGS)
c)	massa	70	(Tecnico)
d)	velocità	30	(CGS)
e)	quantità di moto	2	(Tecnico)
f)	Lavoro	200 000	(CGS)
g)	Potenza	2000	(Tecnico)

5.5 Esprimere nei sistemi S.I. e CGS le misure date nel sistema tecnico delle seguenti grandezze:

a)	accelerazione	5
b)	forza	3
c)	massa	20
d)	lavoro	50
e)	potenza	75

5.6 Esprimere nei sistemi CGS, S.I., le seguenti grandezze:

a)	peso specifico	13,56	kgf/dm^3
b)	velocità	72	km/h
c)	pressione	1	kgf/cm^2

d) massa	8	tonnellate
e) densità	1,3	g/m^3

6° Obiettivo

Saper applicare il principio di omogeneità dimensionale alle relazioni fisiche

6.1 Data la relazione fisica

$$s = At^2 + Bt + C$$

dove s ha la dimensione di una lunghezza, t di un intervallo di tempo, determinare le dimensioni delle costanti, A, B, C nel sistema S.I. e le rispettive unità di misura.

Per il principio di omogeneità dimensionale in una relazione fisica ambo i membri dell'uguaglianza hanno le stesse dimensioni e per ogni membro gli addendi hanno le stesse dimensioni. Avremo perciò che tutti gli addendi del secondo membro hanno la stessa dimensione [L] (lunghezza).

Da ciò segue: $[C] = [L]$

$[B] = [L]\ [T]^{-1}$

$[A] = [L]\ [T]^{-2}$

Le unità di misura sono rispettivamente: m, $m\ s^{-1}$, $m\ s^{-2}$

NOTA: si noti che l'omogeneità dimensionale garantisce che nel passare da un sistema di misura ad un altro, tutti i termini della relazione vengano moltiplicati per lo stesso fattore di ragguaglio e la relazione sia ancora valida, come deve essere per le relazioni fisiche che sono indipendenti dal sistema di misura utilizzato.

6.2 Verificare la validità fisica della seguente relazione:

$s = v_0t + 1/2\ at$ ove s è una lunghezza, v_0 una velocità, a una accelerazione e t un intervallo di tempo.

Per il principio di omogeneità dimensionale entrambi i membri devono avere le medesime dimensioni e , per ogni membro, i vari addendi devono avere le medesime dimensioni. Guardando il primo membro della relazione si può affermare che ogni addendo del secondo membro dovrà avere le dimensioni di una lunghezza [L].

Analizziamo ora il 2° membro addendo per addendo:

per il <u>primo addendo</u>

$[v_0t] = [L]\ [T]^{-1}\ [T] = [L]$ cioè ha le dimensioni di una lunghezza.

per il <u>secondo addendo</u>

$[\ at] = [L]\ \ [T]^{-2}]\ [T] = [L]\ \ [T]^{-1}$ cioè una dimensione di velocità e non di lunghezza come era richiesto dal principio di omogeneità dimensionale .

E' necessario perciò che nel secondo addendo il tempo compaia al quadrato per soddisfare alla omogeneità richiesta. Dovrebbe infatti essere $s = v_0t + 1/2\ at^2$ perché la relazione sia fisicamente valida.

6.3 Data la relazione $V = B\ t^2 + C\ t^{-2} + D\ s$ ove v rappresenta una velocità, t un intervallo di tempo, e s una lunghezza, determinare le dimensioni di B, C, D e le relative unità di misura nei sistemi S.I., cgs, tecnico.

6.4 Data la relazione $F = 6\pi\eta Rv$ dove F rappresenta una forza, R una lunghezza e v una velocità, determinare le dimensioni e la unità di misura del coefficiente η nei sistemi cgs, S.I..

6.5 Data la relazione $s = A \sin(\ kt + \varphi) + B\ e^{-Ct}$ ove s è una lunghezza, t è un tempo, determinare le dimensioni di A, B, C, k, φ e le relative unità di misura nei sistemi S.I., cgs, tecnico.

6.6 Verificare la validità fisica della seguente relazione: $P = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$

dove P rappresenta un intervallo di tempo, m una massa e k la costante dell'esercizio 4.5.
6.7 Verificare la validità fisica della seguente relazione: $$p = p_0 + \delta\, g\, h^2$$ dove p e p_0 rappresentano una pressione, δ una densità, g una accelerazione e h una lunghezza, utilizzando le grandezze fondamentali dei sistemi S.I e cgs.
6.8 Data la relazione fisica: $\eta = \frac{\pi}{8Q} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \cdot r^4$ con Q che rappresenta una portata (volume di liquido nell'unità di tempo) , r una lunghezza e p una pressione, determinare le dimensioni e la unità di misura del coefficiente di viscosità η nei sistemi S.I., CGS e confrontare i risultati con quelli dell'esercizio 6.4
6.9 Verificare la validità fisica della seguente relazione: $$E_{osc.} = \_\ m\, v^2 + \_\ k^2 x^2$$ dove $E_{osc.}$ rappresenta una energia (cioè ha le dimensioni di un lavoro), m una massa, v una velocità, k la costante dell'esercizio 4.5 e x una lunghezza.

<u>7° Obiettivo</u>

Saper esprimere in un sistema metrico relazioni tra grandezze fisiche secondo unità diverse da quelle del sistema.

7.1 Una particella si muove su una circonferenza. La sua velocità angolare ω, misurata in giri/minuto, è funzione del tempo t, misurato in secondi, mediante la relazione : ω= 3t.
Quale relazione esiste tra ω e t se ω si misura in rad/s e t in s?

Nella relazione data ω= 3t. ω e quindi 3t sono espressi in giri/min. Essendo t espresso in s, 3 non è un numero puro, ma esprime tre volte l'unità di misura giro/(min .s).
La relazione ω= 3t si può perciò scrivere nella forma ω= 3 giro/(min . s) . t con 3 numero puro.
Da tale forma risulta chiaro che, se t è espresso in s, ω.risulta espressa in giri /min.
La relazione richiesta dall'esercizio si ottiene esprimendo i giri in radianti e i minuti in secondi. Si ha:

$\omega = 3\ 2\pi\ \text{rad}/(60\text{s}\ .\ \text{s})\ .\ t = \pi/10\ \text{rad/s}^2\ .\ t = \pi/10\ .\ t$
con t espresso in s e ω in rad/s

7.2 L'accelerazione angolare α di una particella che si muove su una circonferenza intorno ad un centro O è data dalla relazione
$\alpha = \frac{\pi}{2} t^2$ dove α è espressa in giri/s^2 e t in minuti.
Determinare la relazione esistente tra α e t se si esprime α in rad/s^2 e t in secondi.

7.3 Il lavoro delle forze di attrito agenti su un corpo che scivola su un piano è dato dalla relazione:
W=4,00 m dove W è misurato in kilogrammetri e m in tonnellate massa. come si scrive questa relazione se W è misurato in Joule e m in kilogrammi massa?

7.4 La potenza di un motore è legata alla velocità angolare di un albero motore dalla relazione P= 20ω con ω espressa in giri al minuto e P in HP (Horse power 1Hp= 745,7 W). Calcolare la relazione esistente tra ω e P se ω viene misurato in rad/s e P viene misurato in W.

7.5 La potenza erogata dal motore il cui albero ruota alla velocità angolare ω esercitando una coppia τ, è dato dalla relazione:
$P=\omega.\tau$ dove P,ω,τ sono espresse nel sistema S.I.. Come dovrebbe essere scritta la relazione se P fosse espresso in kilowatt, ω in giri / minuto e τ in kilogrammetri?

8°Obiettivo

Dato il valore di una certa grandezza, saperne indicare la misura, l'unità di misura, l'errore assoluto, l'errore relativo e le cifre significative

8.1 Misurando con un metro da muratore la lunghezza l di un'asta, la misura è espressa da l= (1,452±0,001)m . si indichi quale valore intendiamo per misura; qual è la unità di misura; quanto valgono l'errore assoluto e l'errore relativo, quante sono le cifre significative.

Misurare una grandezza fisica M significa scegliere in modo opportuno una grandezza campione M', ad essa omogenea, e determinare un numero r, razionale positivo, tale che M=rM'.
Quando si esprime il risultato di un esperimento, finalizzato ad individuare in modo quantitativo una grandezza fisica, esso deve contenere tre elementi essenziali:
1) il numero r, detto nel seguito "misura", che esprime il rapporto delle grandezza rispetto alla unità di misura;
2) la unità di misura
3) l'errore con cui è stata determinata tale misura.

Lo sperimentatore non può determinare il valore esatto della lunghezza dell'asta. Egli può solo affermare che la misura è compresa tra 1,451m e 1,453m e che il suo valore più probabile è 1,452.
1,452m è la misura di l e 0,001m è la sua incertezza od errore assoluto. Si dice errore relativo il rapporto tra errore assoluto e misura. Esso è, ovviamente, un numero puro. L'errore relativo espresso in percentuale si dice errore percentuale. L'errore relativo ε nel caso precedente è uguale a: $\varepsilon = \frac{0,001}{1,452} = 7 \cdot 10^{-4} = 0,07\%$
L'errore, sia assoluto che relativo, è espresso, di norma, con una sola cifra significativa.
In un numero sono significative la prima cifra diversa da zero e tutte le cifre indicate che la seguono (zeri compresi).
Nella determinazione quantitativa di una grandezza fisica l'ultima cifra significativa della misura deve essere dello stesso ordine di grandezza della incertezza assoluta.
Nell'esempio precedente 1,452 ha 4 cifre significative.

8.2 Date le seguenti misure indicare quali sono:
a) la misura
b) l'unità di misura
c) l'errore assoluto
d) l'errore relativo e percentuale
e) il numero di cifre significative.

$P= 3,452\ 10^{3}Pa \pm 0,03\ 10^{2}Pa$

$\Sigma = 15\ kJ/(kg\ \ K) \pm 4\ kJ/(kg\ \ K)$

$L = 4,8\ J \pm 0,1J$

$M= 22,4\ 10^{-3}\ m^{3} \pm 0,1\ 10^{-3}\ m^{3}$

$R = 8,31\ J/(mol\ K) \pm 0,01\ J/(mol\ K)$

9° Obiettivo

Determinare l'errore da cui risulta affetto il valore di una grandezza fisica calcolata a partire dalla misura di altre grandezze attraverso leggi fisiche contenenti operazioni elementari.

9.1 date le grandezze fisiche di valore X= (4,52± 0,02)m Y= (2,31± 0,03)m si determini l'errore da cui risulta affetta la loro somma, la loro differenza, il loro prodotto, il loro quoziente, nonché l'elevamento a potenza di X con esponente α

Caso della somma. Consideriamo una grandezza G ottenuta come somma di due grandezze X e Y affette da errori ±ΔX e ±ΔY. E' evidente che l'errore su G è ricavabile dalle relazioni:
G+ΔG= (X+ΔX)+(Y+ΔY) e G-ΔG=(X-ΔX)+(Y-ΔY) da cui G±ΔG= (X+Y) ± (ΔX+ΔY)
Si generalizza con facilità al caso di più addendi.
Nel nostro caso si ha : X+Y= (6,83 ± 0,05)m

Caso della differenza. Se G è ora definita come differenza di X e Y , si ha immediatamente:
G+ΔG= (X+ΔX)-(Y-ΔY) e G-ΔG=(X-ΔX)-(Y+ΔY) da cui G±ΔG= (X-Y) ± (ΔX+ΔY)
Nel nostro caso si ha : X-Y= (2,21 ± 0,05)m

Caso del prodotto. Se G è ora definita come prodotto di X e Y si ha:
G+ΔG= (X+ΔX) (Y+ΔY) = XY+ XΔY + YΔX + ΔXΔY. Il termine ΔXΔY può essere trascurato poiché prodotto di due quantità in genere piccole. Quindi G+ΔG ≅ XY+ XΔY + YΔX. Analogamente G-ΔG= (X-ΔX) (Y-ΔY) = XY- XΔY - YΔX + ΔXΔY. Da cui G+ΔG ≅ XY-XΔY - YΔX. Complessivamente G±ΔG =XY±(XΔY + YΔX) ed equivalentemente ΔG /G= ΔX/X+ ΔY/Y.
Nel nostro caso si ha : X.Y= (10.4± 0,2)m^2

Caso della potenza. Se G è ora definita come potenza di X di esponente α si ha come estensione del caso precedente: $G+\Delta G= (X+\Delta X)^{\alpha} \cong X^{\alpha}+ \alpha\,(\Delta X)\, X^{\alpha-1}$ ed equivalentemente $\Delta G/G=\alpha\,\Delta X/X$.
Nel nostro caso si ha con α=3: X^3= (92 ± 1)m^3

Caso del rapporto. Se G è ora definita come rapporto di X e Y si ha:
G+ΔG=(X+ΔX)/(Y-ΔY) (valore massimo) G-ΔG=(X-ΔX)/(Y+ΔY) (valore minimo).
Moltiplicando numeratore e denominatore delle due precedenti espressioni rispettivamente per (Y+ΔY) e (Y-ΔY) si ottiene

$$G+\Delta G=\frac{XY+Y\Delta X+X\Delta Y+\Delta X\Delta Y}{Y^2}\cong\frac{XY+Y\Delta X+X\Delta Y}{Y^2}$$

$$G-\Delta G=\frac{XY-Y\Delta X-X\Delta Y+\Delta X\Delta Y}{Y^2}\cong\frac{XY-Y\Delta X-X\Delta Y}{Y^2}$$

Da cui $G\pm\Delta G=\frac{X}{Y}\pm\frac{Y\Delta X+X\Delta Y}{Y^2}$
Ed equivalentemente ΔG /G= ΔX/X+ ΔY/Y
Nel nostro caso si ha : X/Y= (1,96± 0,03)

9.2 Date le seguenti coppie di misure determinare la loro somma e la loro differenza.
a) m_1= (5,6± 0,3) kg m_2= (8,1± 0,4) kg
b) m_1= (4,62± 0,01) m m_2= (8,71± 0,01) m

c) m_1= (2,42± 0,02) m m_2= (1,31± 0,01) m

9.3 Date le seguenti coppie di misure determinare il loro prodotto.
a) m_1= (3,2± 0,1) kg m_2= (2,1± 0,1) m/s
b) m_1= (12,2± 0,01) m m_2= (31± 1) N
c) m_1= (242± 1) cm m_2= (5,31± 0,01) s

10° Obiettivo
Saper usare alcune regole pratiche di approssimazione nel caso di operazioni con valori di grandezze fisiche assegnati senza la esplicita indicazione della incertezza

10.1 Date le due grandezze fisiche (lunghezze): X= 25,34m e Y= 12,6m, si indichi il valore della loro somma, della loro differenza, del loro prodotto e del loro rapporto.

Per ottenere tali valori si utilizzano alcune regole di approssimazione che costituiscono un compromesso adeguato tra l'esigenza di non alterare l'informazione nel calcolo e di non complicare eccessivamente i procedimenti.
Se una grandezza fisica viene assegnata con la sola indicazione della misura, l'ultima cifra dell'allineamento decimale che rappresenta il valore della grandezza, è ritenuta incerta, cioè essa può variare di ± 1.
P.e.: scrivere 2,45 10^5 m vuol dire (2,45± 0,01) 10^5m.
Quando si esegue la somma o la differenza di due grandezze in tal modo assegnate è necessario tenere conto dell'ordine di decimale delle cifre stesse assegnando al risultato tanti decimali quanti ne ha il numero che ne ha di meno. Ogni addendo dovrà essere ridotto prima di eseguire la operazione all'ordine di decimale del numero che ne ha di meno.
Nel nostro caso: 25,34m+12,6m≅25,3m+12,6m=37,9m
25,34m - 12,6m≅25,3m-12,6m=12,7m
Nel caso di prodotto o rapporto si assegna invece al risultato il numero di cifre significative della grandezza che ne ha di meno.
P.e: 25,34m . 12,6m= 319,284m^2≅319m^2.
25,34m / 12,6m= 2,01111 ≅2,01.
Nella risoluzione di problemi la procedura abituale prevede la risoluzione simbolica delle equazioni e sistemi di equazioni (o disequazioni) con sostituzione numerica solo nel passaggio conclusivo; il risultato di questo verrà poi approssimato con le convenzioni esposte. Qualora dovessero essere eseguiti calcoli numerici intermedi su di essi non verrà eseguita alcuna approssimazione.

8.7 Si eseguano i seguenti calcoli approssimando opportunamente.

a) 234 kg + 321,8 kg
b) 121,8 m – 98,71 m
c) 54,71J + 22,1J
d) 23,89 10^5 Pa . 2,8 $10^{-3}m^3$
e) 1,346 kg . 9,81ms^{-2}
f) 250N/ 0,21m

Risultati di alcuni esercizi
1.2 A D H N lunghezza; B E G M tempo; C O volume; F I L forza.
3.2 $[M][L][T]^{-1}$; $[M][L][T]^{-2}$;$[M][L]^{-3}$ $[M][L]^2[T]^{-3}$
3.3 $[F][L]^{-1}[T]^2$; $[L][T]^{-1}$; $[L][T]^{-2}$; $[L][F]$; $[F][T]$; $[L][F]$
3.4 $[M][L]^2[T]^2$; $[M][L]^2[T]^{-2}$; adimensionale; adimensionale
4.2 cm s^{-1}; cm s^{-2} ; g cm s^{-2}; g cm^2 s^{-2}; g $cm^2 s^{-3}$; g cm s^{-1}
4.4 erg= ; g cm^2 s^{-2} ; J=kg m^2 s^{-2}
4.5 $[M][T]^{-2}$ kg s^{-2} ; g s^{-2} ; $[L]^{-1}[F]$ kg_f m^{-1}
4.6 $[M]^{-1}[L]^3[T]^{-2}$ $m^3kg^{-1}s^{-2}$ cm^3 g^{-1} s^{-2}
4.7 $[M][L]^{-1}[T]^{-2}$ kg m^{-1} s^{-2} g cm^{-1} s^{-2} $[L]^{-2}[F]$ kg_f m^{-2}

4.8 $[M][L]^{-3}$ kg m^{-3} g cm^{-3} $[M][L]^{-2}[T]^{-2}$ kg m^{-2} s^{-2} g cm^{-2} s^{-2} $[F][L]^{-4}[T]^{2}$ kg_f m^{-4} s^2 $[F][L]^{-3}$ kg_f m^{-3}
5.2 8 10^5 ms 10^5; 50 m/s 10^{-2}; 1,8 10^{3} kg m^2 s^{-2} 10^7; 78 kg m^{-2} s^{-2} 10; 10^3 kg m^{-3} 10^3 ; 10^{-4}N 10^5
5.3 5000 10^3 ; 981 cm/s^2 10^2 ; 1,2 10^9 erg/s 10^7
5.4 73,6N ; 1,8 10^{-5}N; 70 kg; 0,3 m/s; 19,62 N s; 0,02 J; 19620 W
5.5 5m/s 500cm/s; 29,4 N 2,94 10^5 dyn; 20kg 20000g; 490J 490 10^7erg; 735W 7,35 10^9 erg/s
5.6 132888N/m^3 13288,8 dyn/cm^3; 20 m/s 2000 cm/s; 98000 N/m^2 9800000 dyn/cm^2 ; 8000kg 8 10^6g; 1,3 10^{-3} kg/m^3 1,3 10^{-6} g/cm^3
6.3 $[B]=[L][T]^{-3}$ m s^{-3} cm s^{-3}; $[C]=[L][T]$ m s cm s; $[D]=[T]^{-1}$ s^{-1}
6.4 $[\eta]=[M][L]^{-1}[T]^{-1}$
7.4 P=8,5 $10^6\omega$
7.5 P=9,74 $10^{-4}\omega\tau$
9.2 (13,7±0,7)kg (2,5±0,7)kg ; (13,33±0,02)m (4,09±0,02)m ; (3,73±0,03)m (1,11±0,03)m
9.3 (6,7±0,5)kg m/s ; (380±20) N m ; (1285±8) cm s
10.2 556kg ; 220,5 m; 76,8 J ; 6,7 10^3 Pa m^3 ; 6,7 10^3 Pa m^3; 13,2 kg m s^{-2}; 1200N/m