Moto Armonico Semplice

1° Obiettivo.

Saper riconoscere se un moto è armonico semplice.

1.1 Data la forza centrale $\vec{F} = -kx\overrightarrow{u_x}$ riconoscere che essa genera un moto armonico semplice.

Ricordiamo che l'equazione differenziale che caratterizza un moto armonico semplice è

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0{}^2 x = 0.$$

Dalla equazione fondamentale della dinamica: $a = \frac{F}{m}$; $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x.$

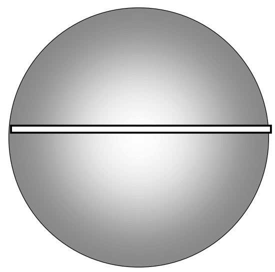
Ponendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$ si osserva che il moto è armonico ed ha periodo $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$

1.2 Nella figura seguente è rappresentata la Terra considerata come una sfera omogenea, in cui è stato scavato un foro che passa per il centro e arriva all'altro estremo del diametro. Si lascia cadere una biglia di massa m nel foro. Riconoscere che essa descrive un moto armonico semplice trascurando la rotazione terrestre e gli attriti.

Si consideri che la forza gravitazionale ha modulo

$F = G\frac{Mm}{d^2}$ ove d è la distanza dal centro della Terra

(essendo nullo l'effetto gravitazionale sulla biglia da parte della porzione della Terra con distanza dal centro maggiore di d)



1.3 Riconoscere che il moto di un pendolo semplice è armonico semplice per piccole oscillazioni.

1.4 Riconoscere che il moto di un pendolo fisico è armonico semplice per piccole oscillazioni.

1.5 Un disco ruota uniformemente in un piano attorno al suo centro O. Una biella AB, che giace nello stesso piano, ha l'estremo A connesso con uno snodo ad un punto sul bordo del disco e l'altro estremo B mobile su di una retta passante per il centro del disco stesso. Riconoscere che il moto del punto B non è armonico semplice.

2° obiettivo

Saper risolvere problemi riguardanti la cinematica del moto armonico semplice

2. 1 Su un corpo di massa m=1,00kg agisce la forza centrale $\vec{F} = -4x\overrightarrow{u_x}$ N. Il corpo oscilla su un segmento AB di lunghezza 12,0cm attorno al suo punto medio trovandosi nell'estremo A al l'istante t=0. determinare: il vettore posizione, la velocità, la accelerazione in funzione di t e all'istante t=1,2s.

Dalla equazione fondamentale della dinamica si ha: a=-4x m/s^2. Il moto è come già visto nell'esercizio 1.1 è armonico semplice con ω_0=2rad/s.

Ricordando che l'equazione di un moto armonico semplice è:

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$ nel nostro caso si ha:

$$\overrightarrow{x(t)} = -0{,}06\cos\left(2\frac{rad}{s}t\right)\overrightarrow{u_x}m$$

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{d\vec{x}}{dt} = 0{,}12\,\mathrm{sen}\left(2\frac{rad}{s}t\right)\overrightarrow{u_x}\frac{m}{s} \quad \text{e}$$

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 0{,}24\cos\left(2\frac{rad}{s}t\right)\overrightarrow{u_x}\frac{m}{s^2}$$

All'istante t=2,0s si ottiene: x=0,039m ; v=-0,091m/s ; a=-0,16m/s^2

2.2 Si ripeta l'esercizio precedente per il caso presentato in 1.2 con AB= diametro della terra e per t=T/3.

2.3 Si ripeta l'esercizio 2.1 nel caso di un pendolo semplice lungo 3,00m che oscilla con una ampiezza angolare di 1,00° in una località con accelerazione di gravità g=9,81m/s^2

2.4 Un moto armonico ha ampiezza 20cm. Quando il corpo si trova a 14cm dal centro di oscillazione nel verso positivo la sua velocità è di 1,2m/s. Si determini la velocità massima, la accelerazione massima, la accelerazione nel punto considerato, il periodo e la frequenza del moto.

2.5 Un moto armonico ha ampiezza 30cm. Quando il corpo si trova a 8cm dal centro di oscillazione nel verso negativo la sua accelerazione è di 0,89m/s^2. Si determini la velocità massima, la accelerazione massima, la velocità nel punto considerato, il periodo e la frequenza del moto.

3° Obiettivo
Saper determinare la energia cinetica, potenziale, totale in un moto armonico semplice

3.1 Con riferimento all'esercizio 2.1 si determini la energia cinetica, potenziale e totale del moto armonico semplice considerato.

Ricordiamo che $E_P = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$ e che $E_K = \frac{1}{2}mv^2$ da cui sostituendo opportunamente si ottengono le energie ricercate: $E_P = 0{,}0030J$ e $E_K = 0{,}0041J$

3.2 Si ripeta l'esercizio 3.1 con riferimento all'esercizio 2.2

3.3 Si ripeta l'esercizio 3.1 con riferimento all'esercizio 2.3

4 ° Obiettivo
Determinare la lunghezza ridotta di un pendolo fisico

4.1 Determinare la lunghezza ridotta di un pendolo fisico costituito da un'asta omogenea di massa m= 2,00kg e lunga 1,75m , vincolata in un suo estremo.

Ricordiamo che per lunghezza ridotta di un pendolo fisico si intende la lunghezza del pendolo semplice di ugual periodo. Poiché $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgb}}$ dove I è il momento di inerzia calcolato rispetto all'asse fisso di sospensione, m è la massa del pendolo, g la accelerazione di gravità locale, b la distanza tra l'asse di sospensione e il centro di massa si ha facilmente che:

$$l_{rid} = \frac{I}{mb} = \frac{\frac{1}{3}ml^2}{m\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}l$$.

Come si vede la lunghezza ridotto dipende solo da l ed è uguale in questo caso a circa 1,17m.

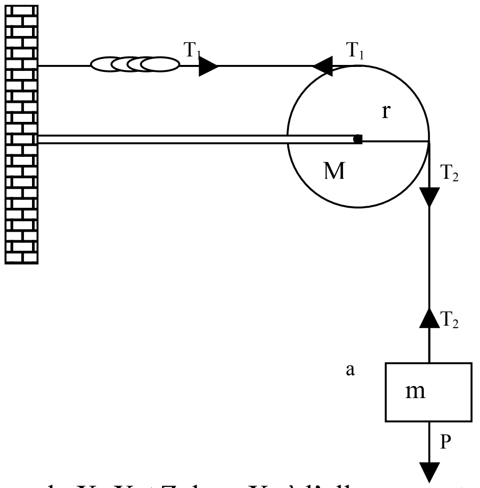
4.2 Si determini la lunghezza ridotta di un pendolo fisico costituito da un'asta sottile lunga 2,00m e di massa 1,00kg imperniata in un suo estremo e che porta nell'altro estremo una sfera di raggio 0,10 m e massa 5,00kg.

4.3 Si determini la lunghezza ridotta di un pendolo fisico costituito da un anello sottile di raggio 2,00m e di massa 10,00kg imperniato in un suo punto.

5° Obiettivo

Saper risolvere problemi sul moto armonico semplice

5.1 Un corpo di massa m è tenuto in equilibrio da una molla di costante elastica K come in figura. La massa della carrucola è M ed il suo raggio è r. Dopo aver spostato la massa m verso il basso di un tratto h la si lascia libera. Calcolare il periodo di oscillazione. Scrivere la legge oraria del moto di m.



Ponendo $X=X_0+Z$ dove X_0 è l'allungamento della molla che serve per equilibrare il peso P si ha che $P=KX_0$.

$$\begin{cases} P-T_2=ma \\ (T_2-T_1)r=I_c\alpha_c \\ T_1=K(X_0+Z) \end{cases} \qquad \begin{cases} P-T_2=ma \\ T_2-T_1=\frac{1}{2}Mr^2\frac{a}{r}\frac{1}{r} \\ T_1=K(X_0+Z) \end{cases}$$

da cui sommando le tre equazioni $P=a\left(m+\frac{1}{2}M\right)+KX_0+KZ$ cioè $0=a\left(m+\frac{1}{2}M\right)+kz$

e infine: $a=-\frac{2K}{2m+M}Z$ equazione caratteristica del moto armonico semplice.

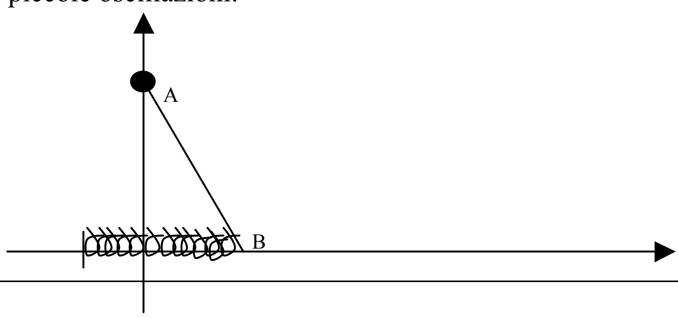
Ne segue che: $\omega^2=\frac{2K}{2m+M}$ e quindi $T=2\pi\sqrt{\frac{2m+M}{2K}}$

Presa come origine dell'asse Z il punto dove il corpo di massa m è in equilibrio si ha:
$Z=A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)$. Al tempo t=0 quando si lascia libero il corpo di massa m si ha :
Z=h e v=0 con $v=A\omega\cos(\omega t+\varphi)$. Ne segue che:

$h=A\,\mathrm{sen}\,\varphi$ ma anche $0=A\omega\cos\varphi$ da cui $\varphi=\frac{\pi}{2}$ e quindi $A=h$

In conclusione: $Z=h\,\mathrm{sen}\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$ cioè $Z=h\cos\omega t$

5.2 Un corpo puntiforme di massa m è vincolato in un sistema di assi cartesiani ortogonali all'asse y. La massa m è connessa nel punto A ad un'asta AB ,di massa trascurabile e lunghezza l, i cui estremi scorrono senza attrito sugli assi del riferimento come in figura. L'estremo B è connesso ad una molla di costante elastica k che a riposo si trova nell'origine. Determinare la posizione di equilibrio della massa e il suo moto per piccole oscillazioni.



5.3 Due corpi di masse m ed M posti su un piano privo di attrito sono vincolati da una molla di costante elastica K. Determinare il periodo di oscillazione delle due masse. (vedi Sistemi di particelle esercizio n.6.4)